加群全体が環の性質を定める話

サクラ

2019 年 05 月 01 日

Abstract

改元を記念して．環論を勉強すると大抵は直ぐに環上の加群が導入されるが，何故加群を導入するのかといったことが説明されることはあまりない．勿論，歴史的には環の表現として加群が考え出されたわけであるが，これは何故表現を考えるのかといった疑問にすり替えただけであり，十分に数学を学んで表現を考える重要性が身に染みるまでは先の疑問に対する答えとしては不適切である．

この文書ファイルでは，上述した疑問に対する一つの解答として次の言明を解説する：環 R 上の (左 R-) 加群全体の性質は環の性質を規定しうる．

Contents

1 半単純環とその周辺

抑も環論は，公理的に定義される代数系である環を詳しく調べることで分類し，可能であれば各クラスごとに構造を決定することが目標である．そこで本節では構造の決定が成功した例として半単純環を取り上げ，加群全体に関する言明により特徴付けられることを紹介する．

Notation 1.1
以降，R および S は環の意味で用いる．

Definition 1.2 (単純加群)
左 R-加群 M が単純であるとは，M の部分加群 N について $N = M$ ないしは $N = 0$ が成立することである．

Definition 1.3 (半単純加群)
左 R-加群が半単純であるとは，M の部分加群 N が M の直和因子であることである．

容易に分かるように，単純加群ならば半単純である．

Definition 1.4 (単純環)
環 R が非自明な両側イデアルを持たないとき単純環という．

Definition 1.5 (半単純環)
環 R が左 R-加群として半単純であるとき半単純環という．

ここで左 R-加群として単純な環は単純環であるが，この逆は成立しないことに留意されたい．

単純アルティン環と半単純環という 2 つのクラスについては構造が完全に決定されており，古典的ながらも応用上極めて重要である．以下では主張のみを紹介する．

Proposition 1.6 (Wedderburn)
環 R について，次は同値である．

1. R は単純アルティン環である．
2. 体 D と自然数 n であって，$R \cong \mathrm{M}(n, D)$ を満たすものが存在する．

Proposition 1.7 (Artin-Wedderburn)
環 R について，次は同値である．

1. R は半単純環である．
2. R は有限個の単純アルティン環の直積と同型である．

ところで上述した 2 つの環はともに内部構造，即ちイデアルに着目することで定義されていたが，その重要性を鑑みると異なる特徴付けが得られると嬉しい．以下では半単純環というクラスが外部構造である加群によって特徴付けが得られることを証明する．先ずは少しばかり加群の性質を調べよう．

Proposition 1.8
半単純左 R-加群 M の部分加群 N は半単純である．

Proof) N の部分加群 L を任意にとり，これが N の直和因子であることを示す．L は M の部分加群でもあるので，M の半単純性から $M \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} L \oplus K$ を満たす M の部分加群 K が取れる．これを用いて $N \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} L \oplus (K \cap N)$ と書けることが分かる．実際，N の元 n を任意にとると n は M の元でもあるので $n = k + l$ が成立するような K の元 k と L の元 l とが一意に取れる．$k = n - l \in N$ より $k \in N \cap L$ であるので $n \in L \oplus (K \cap N)$ が得られる．□

Corollary 1.9
半単純左 R-加群 M の部分加群 N による剰余加群は半単純である．

Proof) M/N の部分加群 N' を任意にとる．標準的射影 $p\colon M \to M/N$ による引き戻し $p^{-1}[N']$ は M の部分加群であるから，$M \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} p^{-1}[N'] \oplus M'$ なる M の部分加群 M' が取れる．M/N はこれを用いて $M/N \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} N' \oplus p[M']$ と書かれる．□

Proposition 1.10
左 R-加群 M について，次は同値である．

1. M は半単純である．
2. $M \cong \sum N_\lambda$ なる M の単純部分加群の族 $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する．

Proof) M が半単純であるとき，$N = \sum_{N' \text{ は単純部分加群}} N'$ が M と一致することを示せば十分である．これの不成立を仮定すると，$M \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} N \oplus L$ なる非自明な部分加群 L が取れて，$x \neq 0$ なる $x \in L$ が取れる．$\mathrm{l.ann}(x)$ を含む極大左イデアル $\mathfrak{m}$ を取ると，$\mathfrak{m}x$ は Rx の極大部分加群なので，$Rx/\mathfrak{m}x$ は単純加群であ

る．ここで $Rx \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} R/\mathrm{l.ann}(x)$ が成立するので，この同型を通して単純加群 $Rx/\mathfrak{m}x$ と同型な Rx の単純部分加群が取れる．これは L の構成に矛盾する．

逆に M が単純部分加群の族 $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の和で掛けるとき，$\mathfrak{X} = \{\Lambda' \subset \Lambda \mid N + \sum_{\lambda\in\Lambda'} M_\lambda = N \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda'} N_\lambda\}$ が集合の包含に関して非空な帰納的集合である．Zorn の補題を適用して得られる極大元 $\Lambda_{\max}$ について，$M = N + \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ が成立することに留意すれば，$M = N \oplus \sum_{\lambda\in\Lambda_{\max}} N_\lambda$ が得られる． □

次に特徴づけに際して重要な射影加群を定義する．

Definition 1.11 (自由加群)
左 R-加群 M が自由加群であるとは，$M \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} R^{\oplus\Lambda}$ なる集合 Λ が存在することである．

Example 1.12 (体上の加群)
体 K 上の加群 V とは線型空間のことにほかならず，線型代数の一般論から V には基底が存在する．よって $V \cong_{K\text{-}\mathbf{Mod}} K^{\oplus\Lambda}$ なる集合 Λ が存在することが分かり自由[*1]である．

Remark 1.13
任意の左 R-加群は自由加群からの全射が存在する．実際，e_m を m に写すような $R^{\oplus M}$ から M への加群の射が存在し，これは定義より全射である．この事実は時より用いる．

Definition 1.14 (射影加群)
左 R-加群 M が射影加群であるとは，任意の左 R-加群の全射準同型 $f\colon X \to Y$ に対して，M から Y へ準同型 g が伸びているならば，$h\colon M \to X$ であって $hf = g$ を満たすものが存在することである．

自由加群は射影加群である．この証明はそこまで難しくなく[*2]直和の普遍性を用いればよい．

Proposition 1.15 (射影加群の特徴付け)
左 R-加群 M について次は同値である．

(1) M は射影加群である．
(2) 任意の短完全系列 $0 \to X \to Y \xrightarrow{f} M \to 0$ は分裂する．
(3) M はある自由加群の直和因子である．

Proof) (1) を仮定する．短完全系列 $0 \to X \to Y \xrightarrow{f} M \to 0$ について f は全射であることに留意すると，射影加群の定義から $g\colon M \to Y$ であって $f \circ g = \mathrm{id}_M$ を満たすものが存在するので分裂することが示された．

(2) を仮定する．このとき全射 $f\colon R^{\oplus M} \to M$ が存在し，これより得られる短完全列 $0 \to \mathrm{Ker}(f) \to R^{\oplus M} \xrightarrow{f} M \to 0$ は分裂するので M は自由加群の直和因子である．

(3) を仮定する．即ち M が $R^{\oplus\Lambda}$ の直和因子だと仮定すると，$R^{\oplus\Lambda} \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} M \oplus M'$ なる M' が取れる．左 R-加群の全射準同型 $f\colon X \to Y$ と左 R-加群の射 $g\colon M \to X$ を任意にとると，$R^{\oplus\Lambda}$ から Y への左 R-加群の射であって，M に制限すると g であり，M' に制限すると零射であるようなものが取れる．これを $\bar{g}$ と書く．$\bar{g}$ は全射準同型であるので，自由加群は射影加群であることとに留意すれば $\bar{h}\colon R^{\oplus\Lambda} \to X$ であって $f \circ \bar{h} = \bar{g}$ を満たすものが取れる．以て $h = \bar{h} \circ \iota_1$ と置けば，$f \circ h = f \circ \bar{h} \circ \iota_1 = \bar{g} \circ \iota_1 = g$ が成立するので，M は射影加群であることが示された． □

[*1] 実はこれは体の特徴付けであることが知られている．
[*2] R 自身を左 R-加群と見ると射影加群であることと，射影加群の直和が射影加群であることとを示せばよい．

以上の準備の下で半単純環を特徴付けよう．

Proposition 1.16 (半単純環の特徴付け)
次は同値である．

1. R は半単純環である．
2. 任意の左 R-加群 M は半単純である．
3. 任意の左 R-加群 M は射影的である．

Proof) まず (1) と (2) の同値性を示す．(1) を仮定する．このとき左 R-加群 M の各元 m に対して $R \to Rm$ なる全射準同型 f が存在し，準同型定理より $Rm \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} R/\mathrm{Ker}(f)$ が成立するので，M の単項生成部分加群 Rm は半単純加群である．以て M は $M = \sum_{m \in M} Rm$ として半単純加群の族の和として書かれることが分かり，半単純であることが得られた．逆に (2) を仮定すると，半単純環の定義より (1) が従うので，同値性が分かった．

次にこの結果を用いて (1) と (3) の同値性を示す．(1) を仮定する．このとき左 R-加群 M に対して短完全列 $0 \to \mathrm{Ker}(f) \to R^{\oplus M} \xrightarrow{f} M \to 0$ が取れるが，仮定より $R^{\oplus M}$ は半単純であり，ある部分加群と同型な $\mathrm{Ker}(f)$ は $R^{\oplus M}$ の直和因子である．以て先に考えていた短完全列は分裂し，M は自由加群 $R^{\oplus M}$ の直和因子であること，即ち射影加群であることが得られた．逆に (3) を仮定する．左 R-加群 M の部分加群 N を任意に取るとき，$0 \to N \to M \to M/N \to 0$ が取れるが，仮定より M/N は射影加群なので分裂する．以て N は M の直和因子であることが得られた． □

2 余談:加群全体が環を規定する他の例

このように環の半単純性はその上の加群全体に着目することで特徴付けられた．同様に外部構造に着目することで特徴付けられるクラスに von Neumann 正則環がある．この節に於いてはテンソル積を既知としてこのクラスを簡単に紹介する．

Definition 2.1 (von Neumann 正則環)
環 R が von Neumann 正則環であるとは，R の任意の元 x について $x \in xRx$ が成立することである．

この von Neumann 正則環は平坦加群を用いて特徴づけられることが分かる．

Definition 2.2 (平坦加群)
左 R-加群 M が平坦加群であるとは，任意の右 R 加群の完全列 $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ から誘導されるアーベル群の系列 $0 \to N_1 \otimes_R M \to N_2 \otimes_R M \to N_3 \otimes_R M \to 0$ が完全であることである．

Remark 2.3
射影加群は平坦加群であることが分かる．

Proposition 2.4 (von Neumann 正則環の特徴付け)
次は同値である．

1. 環 R は von Neumann 正則環である．
2. 任意の左 R-加群は平坦加群である．

Proof)　この証明中では Tor 函手の基本的な性質を既知と仮定する．環 R が von Neumann であるとき左 R-加群 M について考える．右イデアル L と左イデアル K とについて，自然な写像 $(R/L)\otimes_R K \to (R/L)K$ が単射であることから R/L が平坦加群であることが分かる．以て $\mathrm{Tor}^q_R(M, R/L) = 0$ であるので，同型 $R\otimes_R M \cong_{R\text{-}\mathbf{Mod}} M$ から同型 $L\otimes_R M \cong LM$ が誘導される．以て M は平坦加群である．

逆に任意の左 R-加群が平坦加群であるとき R/Ra も平坦であるので，任意の右イデアル L に対して $Ra\cap L = L(Ra)$ が成立する．これより $Ra\cap aR = (aR)(Ra) = aRa$ が得られ，$a\in aRa$ が分かる．　$\square$

Remark 2.5
ここまでで示した特徴づけと，自由ならば射影および射影ならば平坦という性質から，例えば体ならば半単純や半単純ならば von Neumann 正則などが分かる．

更にこの事実を用いると，環 R 上の多項式環 $R[x]$ は半単純環ではないことが分かる．実際，$R[x]$ の元である x は次数を勘定することにより $x\notin xRx$ であることが分り，von Neumann 正則でないので特に半単純でもない．

References

[1] 佐藤眞久，岩永恭雄 [佐藤岩永]『環と加群のホモロジー代数的理論』，日本評論社．